TP DE CALCUL NUMÉRIQUE
ORBITES AUTOUR D'UN TROU NOIR DE SCHWARZSCHILD

1 Contexte astrophysique

Depuis les travaux de Kepler sur les orbites des planètes et ses fameuses lois, notre compréhension de la gravitation a beaucoup progressé. Newton fut le premier a synthétiser toutes les constatations résumées dans les lois empiriques de Kepler. La gravitation est interprétée comme une force entre deux masses graves dont l'intensité est proportionnelle au produit des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Cette loi de Newton est très bien vérifiée dans le système solaire où l'on peut raisonnablement supposer que le champ gravitationnel est faible. Le potentiel gravitationnel représente la quantité essentielle dans la description de l'interaction gravitationnelle.

En étudiant les orbites des planètes les plus proches du Soleil et notamment Mercure, on s'est aperçu que l'orbite de cette planète ne vérifie pas exactement la loi de Newton. L'orbite de Mercure ne se referme pas complètement. On observe au contraire une précession de l'orbite de plusieurs centaines de secondes d'arc par siècles, environ $575''$/siècle, provoqué par les perturbations gravitationnelles imposées par les autres planètes et l'aplatissement du Soleil. Mais il reste un résidu de précession de $43''$/siècle qui restait inexpliqué puisque la théorie de Newton prévoit un taux de précession de $532''$/siècle.

Il fallu attendre les travaux d'Einstein sur la gravité pour comprendre l'origine de cette précession supplémentaire. La relativité générale rend très bien compte de ce mouvement additionnel. C'est une théorie métrique de la gravitation dans laquelle le champ de force est remplacé par une structure courbe de l'espace-temps dans lequel se meut une particule ou un objet. À la notion de force se substitue la notion de courbure et d'accélération relative entre objets. La prédiction de cette précession de Mercure est un des grands succès de la relativité générale. Il en existe d'autre comme la déviation des rayons lumineux ou le décalage gravitationnel vers le rouge valable pour des particules sans masse telles que les photons.

Dans ce projet numérique, nous allons étudier le mouvement de particules massives dans le champ gravitationnel au voisinage d'une masse ponctuelle centrale sans rotation ni charge c'est-à-dire un trou noir de Schwarzschild. Le but est de quantifier numériquement le taux de précession de l'orbite de Mercure à cause des effets de relativité générale. On étudiera aussi différents types d'orbites autour d'un tel objet.

On considère donc les trajectoires possibles d'une particule massive autour d'un trou noir de Schwarzschild dont la métrique est donnée par [1, 2]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_\mathrm{s}}{r}\right) c^2\, dt^2 - \left(1 - \frac{R_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\, (\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) \tag{1}$$

Nous avons introduit une grandeur fondamentale qui est le rayon de Schwarzschild du corps par la relation

$$R_\mathrm{s} = \frac{2\,G\,M}{c^2} \tag{2}$$

Noter que la masse M du trou noir ou de l'objet central responsable de la gravité est la seule donnée du problème. Les autres grandeurs intervenant sont la constante de gravitation G et la vitesse de la lumière c. La théorie de la relativité générale postule que les particules suivent des géodésiques de l'espace-temps autrement dit elles empruntent le plus court chemin entre deux événements de l'espace-temps (la notion de distance étant un peu différente de celle de l'espace euclidien tridimensionnel ordinaire). Les équations du mouvement qui en résultent sont données dans le prochain paragraphe.

En théorie newtonienne, les orbites possibles sont

— soient liées telles que les orbites circulaires et elliptiques. La particule gravite autour de l'objet central.

— soient libres, les orbites paraboliques. La particule vient de l'infini et retourne vers l'infini. Elle n'est pas liée à l'objet central.

En relativité générale, un nouveau type de trajectoire existe. En effet, sous certaines conditions initiales, la particule gravitante est définitivement capturée par l'étoile centrale. Nous verrons quelques exemples d'orbites instables plongeant vers le trou noir.

2 Introduction : les équations du mouvement

Grâce à la symétrie sphérique du champ gravitationnel, le mouvement orbital de la trajectoire est entièrement inclus dans un plan. On choisit donc un système de coordonnées sphériques (r, ϑ, φ) adapté tel que ce plan soit confondu avec l'équateur $\vartheta = \pi/2$.

Dans la suite on considère une particule de masse quelconque notée m. En introduisant le temps propre de la particule défini par $c\,d\tau = ds$, les équations du mouvement de la trajectoire dans le plan équatorial sont

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{R_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1} \frac{E}{m\,c^2} \tag{3a}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{m\,r^2} \tag{3b}$$

$$\left(\frac{dr}{c\,d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{m^2\,c^4} - \left(1 - \frac{R_\mathrm{s}}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{m^2\,c^2\,r^2}\right) \tag{3c}$$

t est un temps universel, celui mesuré par une horloge lointaine qui ne ressent pas les effets de la gravitation. Les deux intégrales du mouvement sont l'énergie totale E de la particule et son moment cinétique L. C'est un système de trois équations différentielles ordinaires dont les inconnues sont (t, r, φ) à déterminer en fonction du temps propre τ.

À faire :

Dériver la dernière équation différentielle, équation (3c), par rapport au temps propre τ afin d'obtenir une équation différentielle du deuxième ordre pour r de la forme $d^2r/d\tau^2 = ...$ Ceci permet d'éliminer le carré de la dérivée première de r, $dr/d\tau$.

Le système ainsi formé sera un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre non linéaires pour les fonctions inconnues $\vec{y} = \{t, r, \varphi\}$ dépendantes de la variable τ, le temps propre. On pourra résoudre ce système de la forme $\vec{y}\,'(\tau) = \vec{f}(\vec{y}, \tau)$ par des méthodes classiques d'intégration du type Euler explicite, Runge-Kutta d'ordre 2 et d'ordre 4 ou Burlisch-Stoer en fonction de l'état d'avancement du projet [4, 3].

On essaiera aussi la méthode plus économique suivante. Lorsque le second membre de l'équation f ne dépend pas explicitement du temps, il existe une formulation simple et peu coûteuse en mémoire de la version Runge-Kutta, imaginée par Jameson, Schmidt et Turkel (1981).

Pour chaque pas de temps y^n, une méthode d'ordre s est donnée par l'algorithme

1. initialisation : on pose $y^* = y^n$

2. boucle : pour k de s à 1 par pas de -1, (k=s ;k>=1 ;k- -)

$$y^* = y^n + \frac{dt}{k}\, f(y^*)$$

3. mise à jour : $y^{n+1} = y^*$.

avec y^{n+1} la solution au pas de temps suivant.

3 Résolution numérique des équations du mouvement

On considère dans la suite des cas concrets de mouvement d'une particule autour d'un objet massif de masse M. On commence par le mouvement de chute libre radial vers le centre du trou noir pour une première approche du problème, puis on étudiera les orbites liées circulaires et enfin les orbites elliptiques. Lorsque l'on développe un code numérique, il est toujours bon de vérifier les algorithmes et la structure du programme en testant sur des cas simple mais dont on connaît la solution analytique exacte. C'est ce que nous allons faire dans la suite en partant du mouvement de chute radiale.

3.1 Le mouvement de chute libre radial

Pour un corps tombant vers le trou noir et ne possédant pas de moment cinétique $L = 0$, lâché à une distance r_0 de l'origine avec une vitesse radiale nulle telle que $E \leqslant m\,c^2$ [1], la trajectoire est judicieusement paramétrée par

$$r = \frac{r_0}{2}\,(1 + \cos\eta) \tag{4a}$$

$$c\,\tau = \frac{r_0}{2}\,\sqrt{\frac{r_0}{R_\mathrm{s}}}\,(\eta + \sin\eta) \tag{4b}$$

le paramètre η variant de 0 à π avec $r(\eta = 0) = r_0$. Le temps propre de chute libre jusqu'au centre tel que mesuré par la particule est fini et donné par

$$\tau = \frac{\pi\, r_0}{2\,c}\,\sqrt{\frac{r_0}{R_\mathrm{s}}} \tag{5}$$

Le temps coordonnée, c'est-à-dire le temps mesuré par un observateur lointain au repos par rapport au trou noir est

$$c\,t = \eta\,\left(\frac{r_0}{2} + R_\mathrm{s}\right)\,\sqrt{\frac{r_0}{R_\mathrm{s}} - 1} + \frac{r_0}{2}\,\sqrt{\frac{r_0}{R_\mathrm{s}} - 1}\,\sin\eta + R_\mathrm{s}\,\log\left[\frac{\sqrt{r_0/R_\mathrm{s} - 1} + \tan(\eta/2)}{\sqrt{r_0/R_\mathrm{s} - 1} - \tan(\eta/2)}\right] \tag{6}$$

À faire :

— Avant de procéder à une quelconque programmation, effectuer une adimensionnalisation des équations du mouvement en prenant comme référence de vitesse celle de la lumière c, comme distance caractéristique le rayon gravitationnel $R_g = G\,M/c^2$ à ne pas confondre avec le rayon de Schwarzschild $R_\mathrm{s} = 2\,R_g$. En déduire l'échelle de temps caractéristique associée qui sera celle des simulations.

1. Si $E = m\,c^2$, la particule démarre de l'infini avec une vitesse nulle et si $E < m\,c^2$ la particule démarre de $r = r_0$ avec une vitesse nulle. Si $E > m\,c^2$ la particule démarre avec une vitesse non nulle de l'infini.

— Intégrer numériquement les équations du mouvement (3a) et (3c) par la méthode d'Euler explicite. L'équation (3b) est identiquement vérifiée pour un mouvement radial avec $\varphi = cste$. Essayer ensuite la méthode Runge-Kutta d'ordre 2 et enfin celle de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de temps (propre) fixé. Vous pouvez aussi utiliser d'autres méthodes de votre choix.

— Vérifier que le temps propre τ de chute libre est fini tandis que le temps t mis pour attendre l'horizon en $r = R_s$ d'un observateur immobile situé loin du trou noir est infini.

— Contrôler la précision de votre solution numérique en comparant à la solution indiquée dans l'éq. (4). Utiliser des pas de temps $\Delta\tau$ de plus en plus petits et vérifier la décroissance de l'erreur en accord avec l'ordre de la méthode employée. Pour cela, à partir de la solution numérique, déduire de r le paramètre η puis la valeur théorique de τ à comparer à celle des simulations. Tracer l'erreur maximale en fonction du pas de temps pour les différentes méthodes, en échelle log-log.

3.2 Les orbites liées

On étudie maintenant les orbites liées d'une particule massive possédant une énergie E et un moment cinétique L tous les deux quelconques.

3.2.1 Orbites circulaires

Les orbites circulaires en relativité générale sont données en fonction de (E, L) par

$$\frac{L^2}{m^2\, c^2\, R_s^2} = \frac{r^2}{R_s\,(2\,r - 3\,R_s)} \tag{7a}$$

$$\frac{E^2}{m^2\, c^4} = \frac{(r - R_s)^2}{r\,(r - 3/2\,R_s)} \tag{7b}$$

r est le rayon de l'orbite et m la masse de la particule.

À faire :

— Une telle orbite n'existe que pour un moment cinétique de la particule tel que $L \geq \sqrt{3}\, m\, c\, R_s = L_{\text{isco}}$ [2]. D'où provient cette inégalité ?

— Intégrer les équations du mouvement (3) en choisissant différentes valeurs de (E, L). Comparer les différentes méthodes, Euler explicite et Runge-Kutta. Tracer pour chacune des méthodes la fonction $r(\tau)$.

— Il est remarquable que la vitesse angulaire Ω de l'orbite circulaire est identique à celle de la théorie de Newton. Vérifier cette assertion en traçant φ en fonction de t.

— Vérifier que pour une valeur du moment cinétique inférieure à L_{isco}, la particule est capturée par le trou noir. Pour cela perturbez la vitesse radiale initiale de la particule.

3.2.2 Orbites elliptiques

Une prédiction importante de la relativité générale concerne la précession des orbites. Pour une orbite faiblement excentrique d'excentricité $e \ll 1$, deux passages consécutifs au périastre nécessitent une variation de l'angle polaire de

$$\Delta\varphi = \frac{2\,\pi}{\sqrt{1 - 3\,R_s/r_0}} \geq 2\,\pi \tag{8}$$

2. isco est un acronyme anglais pour dernière orbite circulaire stable (innermost stable circular orbit), une notion très importante pour les disques d'accrétion autour de trous noirs supermassifs ou de masse stellaire.

où r_0 représente le rayon de l'orbite circulaire non perturbée ($e = 0$).

À faire :

- Retrouver cette expression en intégrant plusieurs trajectoires elliptiques de particule avec des rayons r_0 différents et de faibles excentricités, $e \ll 1$.
- Prendre ensuite des orbites fortement elliptiques, $e \lesssim 1$. Comparer à l'expression approchée de l'équation (8) valable pour $e \ll 1$.

3.3 Précession de l'orbite de Mercure

Pour finir, on s'intéresse à l'orbite de Mercure autour du Soleil.

À faire :

- Chercher dans la littérature les caractéristiques de l'orbite de Mercure ainsi que la masse du Soleil.
- Exprimer ces grandeurs physiques de manière adimensionnelle, c'est-à-dire en prenant les normalisations en temps et distance indiquées plus haut. Faites-le impérativement avant d'effectuer vos simulations.
- Retrouver la valeur de la précession de l'orbite de Mercure donnée en introduction de ce projet.

4 Pour aller plus loin

Cette étude de l'orbite d'une particule massive est transposable avec peu de modifications à la trajectoire des photons en champ gravitationnel fort. Le temps propre est remplacé par un paramètre affine ou simplement la variable s. On peut alors retrouver la déviation des rayons lumineux et le décalage spectral vers le rouge. Mais on peut aussi former des images relativistes comme par exemple celle d'un disque d'accrétion autour d'un trou noir vu sous un certain angle d'inclinaison, incluant les effets Doppler classique et relativiste. Pour les curieux, consulter [5].

Références

[1] Misner, Thorne & Wheeler, Gravitation, Freeman & Company, 1973.

[2] Shapiro & Teukolsky, Black holes, white dwarfs and neutron stars, Wiley, 1982.

[3] Stoer & Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Springer, 2002

[4] Press, Teukolsky, Vetterling & Flannery, Numerical Recipes in C/C++, Cambridge University Press, 2007.

[5] Vincent et al., GYOTO : a new general relativistic ray-tracing code, Classical and Quantum Gravity, 2011, 28, 225011.